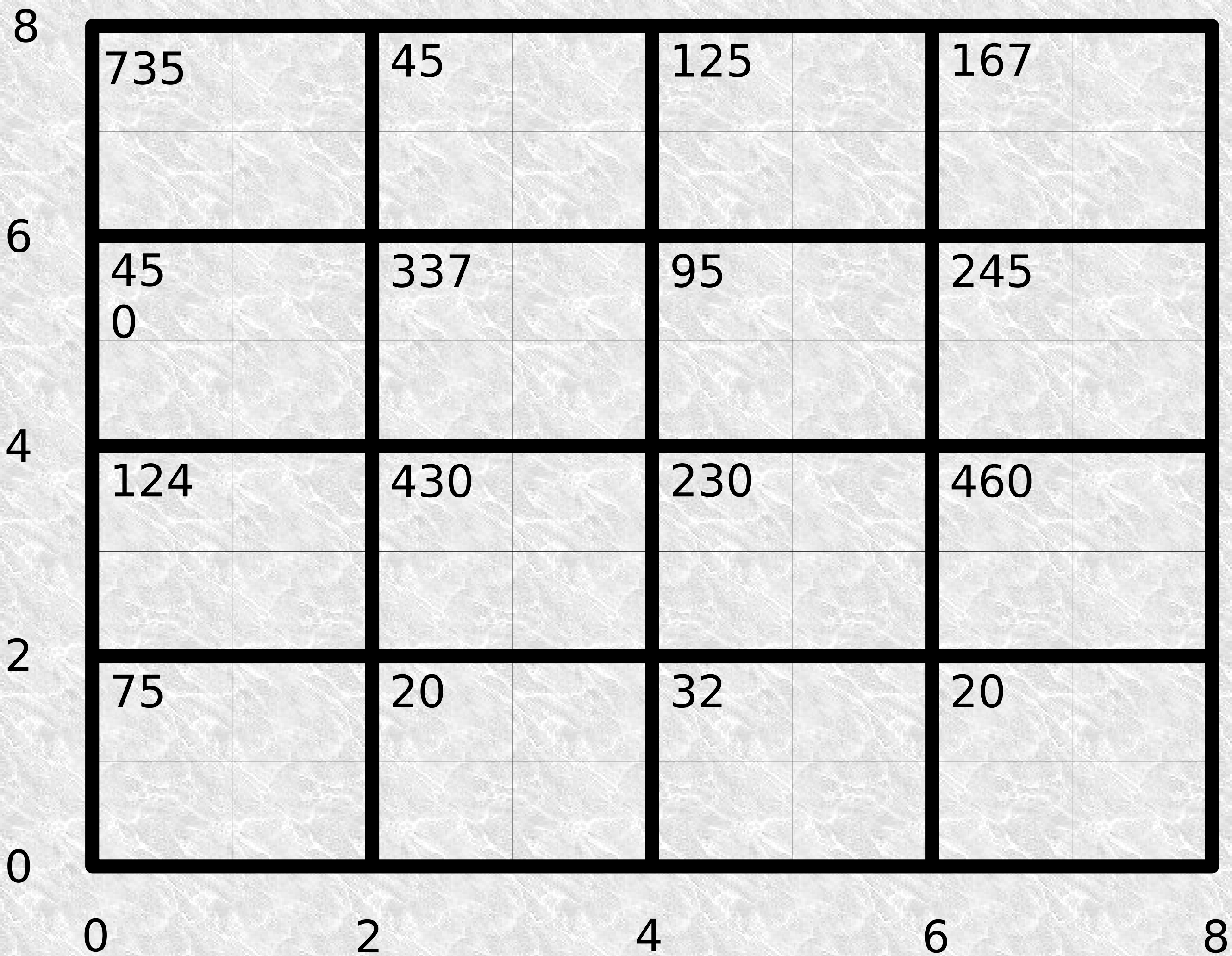
Kriging

Matthias Bremer

Geostatistik
WS 2006/2007

08.02.2007

Das Problem



N Messwerte

$z(x_1), \ldots, z(x_N)$

Das Problem

- Abbaukosten (=ökonomischer Cut-off) für ein 2x2-Feld: 300

- räumliche Interpolation über das Volumen (Ertrag) der 16 2x2-Felder?

$$z_V = \frac{1}{V} \int_V z(x)\,dx$$

Räumliche Interpolation

Interpolation z.B. durch Polygon-Methode

Problem: Es wird nur ein Wert zur Interpolation eines Volumens herangezogen.

⇨ Die Ermittlung einer stetigen Schätzung erfordert viele Messwerte.

Lösung: (Geo-)Statistische Zusammenhänge zwischen den Messwerten nutzen.

⇨ Kriging

Kriging

Wikipedia: Unter Kriging (oder auch: Krigen) versteht man ein geostatistisches Verfahren, mit dem man Werte an Orten, für die keine Probe vorliegt durch umliegende Messwerte interpolieren oder auch annähern kann.

Das Verfahren wurde von dem südafrikanischen Geostatistiker Daniel Krige (1952) entwickelt und später nach ihm benannt.

Kriging

1. experimentelles Variogramm
2. anpassen an Variogrammmodell (ggf. Modelle addieren)
3. Kriging-System aufstellen
4. System lösen
5. Berechnung der Schätzung

Regionalisierte Variable

Stationarität:

- räumlich homogene Zufallsfunktion $z(x) = (x+h)$

Schwache Stationarität:

- $E[z(x)] = m(x) = m$
- $Cov[z(x), z(x+h)] = E[z(x)-z(x+h)] – m^2 = C(h)$

Intrinsische Zufallsfunktion:

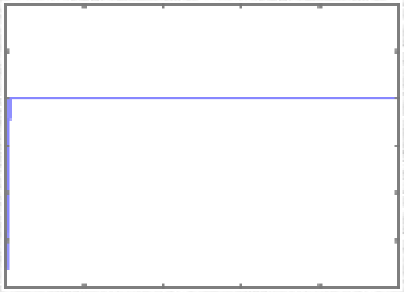
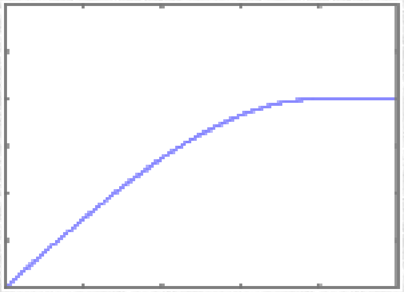
- $E[z(x)] = m(x) = m$
- das Variogramm ist konstant für alle x

Variogramm

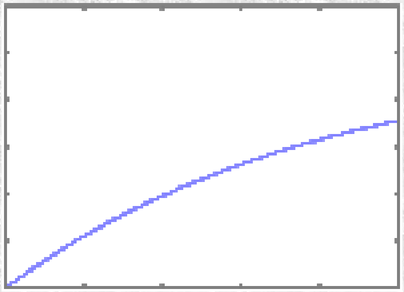
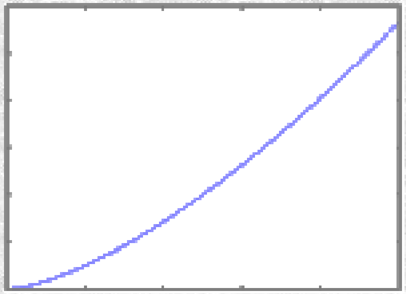
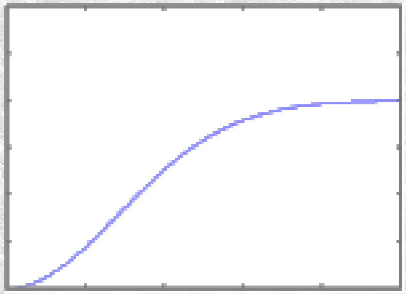
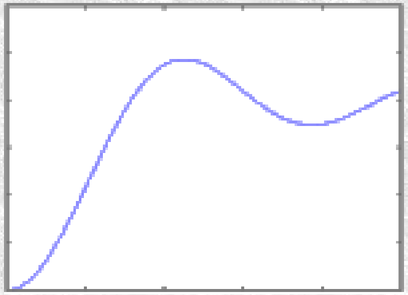
Beschreibt den räumlichen Zusammenhang zwischen ortsabhängigen Zufallsvariablen in Abhängigkeit vom Abstanhsvektor h.

$$\gamma(h)=\frac{1}{2\cdot N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}\left[z(x_i+1)-z(x_i)\right]^2$$

Variogramm-Modell

- Nugget-Effekt
- spärisches Modell
- exponentielles Modell
- Potenz-Modell
- Gauß-Modell
- Kardinal-Sinus-Modell

Variogramm-Modell

Parameter:

h - Abstand

c - sill (Maximalwert)

a - range (Reichweite)

Nugget-Effekt

Variogramm-Modell

Die Anpassung des Variogramm-Modells ist in der Regel ein subjektiver Prozess. Ein numerisches Anpassen ist aber auch denkbar, wenn auch aufwendig.

Wichtige Punkte dabei sind:

1) Nugget-Effekt
2) Steigung am Ursprung
3) Reicheite (Wann wird der Maximalwert erreicht?)
4) Sättigungswert
5) Anisotropien

Variogramm berechnen

vario: Usage:

vario {[model] [c] [a] {nugget}}

model:	0 - Nugget
	1 - sperical
	2 - exponential
	3 - power
	4 - Gaussian
	5 - cardinal-sine
c:	parameter c in variogram model
a:	range
nugget:	nugget effect to add (optional)

vario 4 30000 4 22000

Nugget-Effekt

a

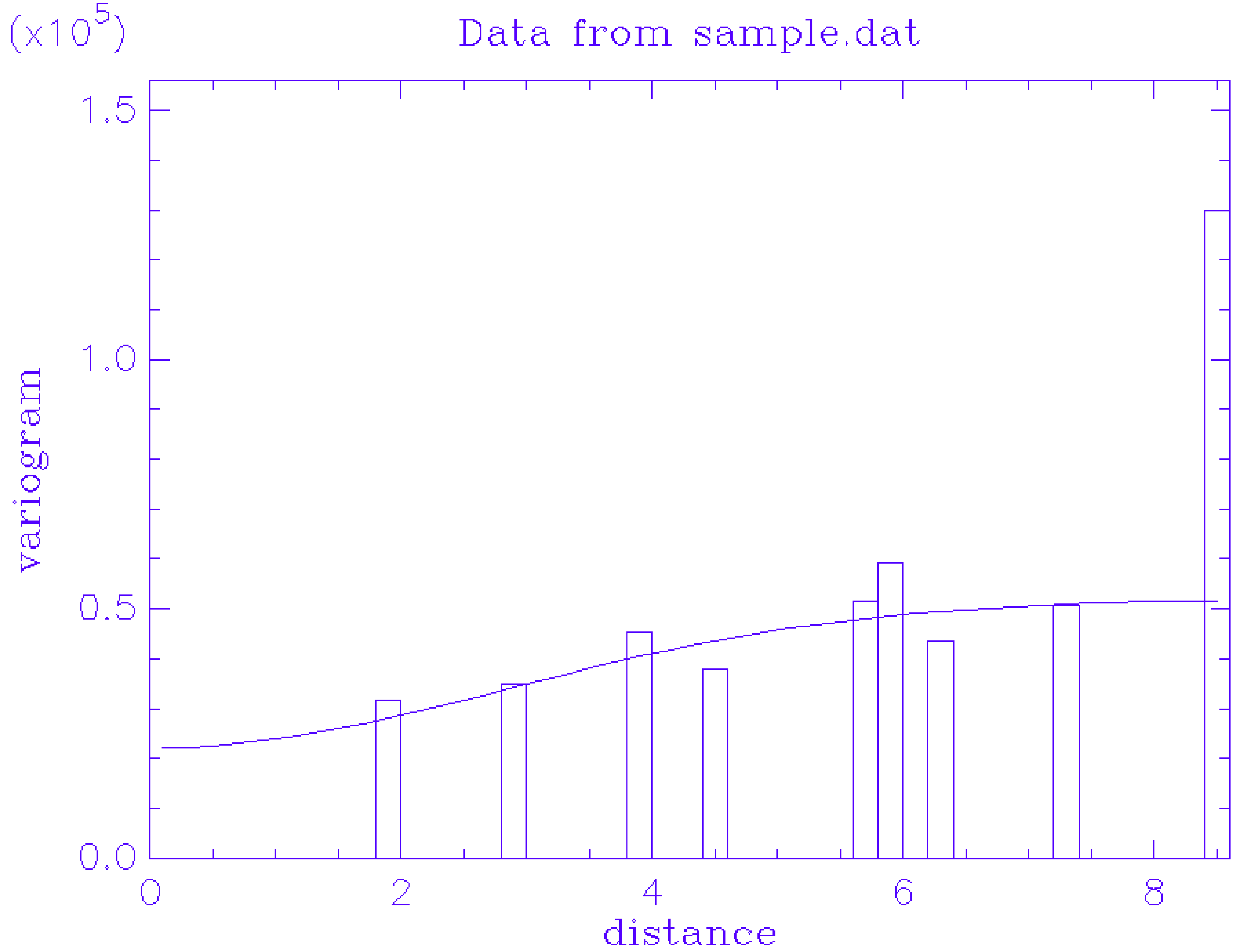
c

Modell

Variogramm-Modell

Gauss-Modell: c = 30000
a = 4
Nugget-Effekt: c = 22000

$$\gamma(h) = 30\,000 \cdot \left(1 - e^{-(h/4)^2}\right) + 22\,000$$



Data from sample.dat
(x10^5)
variogram
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4
6
8
distance

Kriging-System

Aus Variogrammmodell berechnen:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,N} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N,1} & \cdots & \gamma_{N,N} & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\gamma}(x_{1,} V) \\ \vdots \\ \overline{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit $$\overline{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(|x_i - x|)\, dx$$

$$\gamma_{i,j} = \gamma(\|x_i - x_j\|)$$

Kriging-System

$$\bar{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(|x_i - x|)\, dx$$

Berechnung des Integrals durch Diskretisierung:

$$\bar{\gamma}(x_i, V) \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \gamma(|x_i - x_k|)$$

mit m im Volumen V gleichmäßg
verteilten Punkten

Kriging-System

Aus den Gewichten λ wird des gewichtete Mittel über einen Volumen-Block berechnet:

$$z_V = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i z(x_i)$$

Implementierung des Kriging-Systems in *Octave:*

kriging(model, c, a, nugget)

Schätzwerte

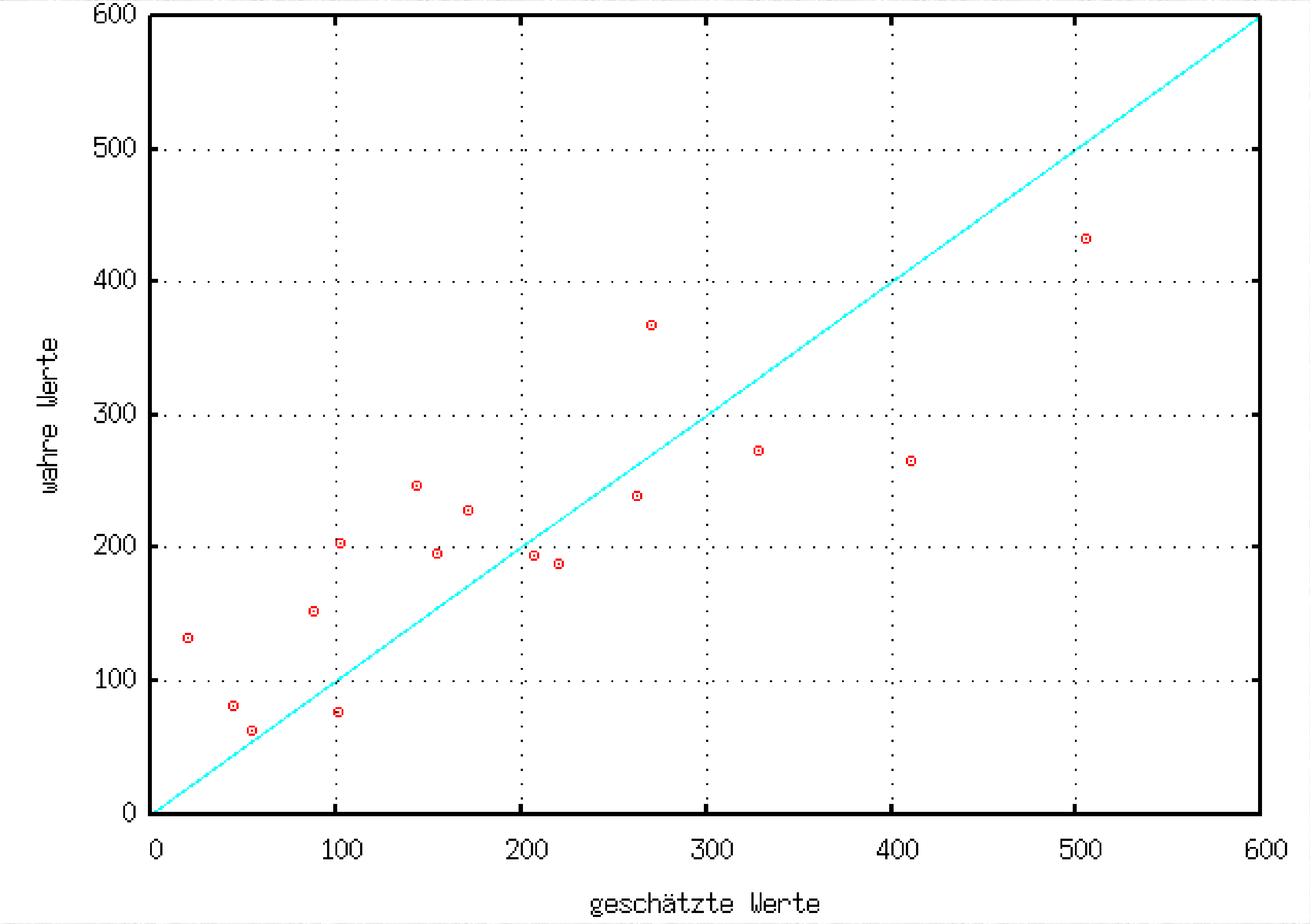
Wahre Werte

505	143	88	207
270	328	171	411
102	220	154	263
101	54	44	155

Werte mit obigem Variogramm-Modell und
Diskretisierung des Volumens mit 100 Punkten

432.5	247.2	152.9	194.7
368.0	272.9	229.0	265.3
204.4	187.8	196.8	239.0
76.7	63.5	81.4	133.4

Schätzwerte



WWW / Literatur

Präsentation und Programme unter:
http://bfe.hachti.de/kriging/

Margaret Armstrong,
Basic Linear Geostatistics,
Springer

G. Scherelis, W. D. Blümel,
Geostatistik und ihre Anwendungsperspektiven in der Geoökologie am Beispiel des Kriging-Verfahrens,
Geographisches Institut II der Universität Karlsruhe