

Proseminar Technomathematik
WS 2005/2006

Satellitenbahnen

Matthias Bremer
mbremer@math.uni-bremen.de

1 Einleitung

In diesem Vortrag soll es um die Bewegung von Himmelskörpern und deren Vor-ausberechnung in einem geschlossenen System gehen. Es werden speziell Satelliten betrachtet und dazu ein vereinfachtes Modell Erde-Mond-Satellit vorgestellt. Die Vereinfachungen beziehen sich einerseits auf die Reduzierung des Modells auf ein Dreikörperproblem mit zwei relativ großen und einer im Vergleich dazu vernachlässigbar kleinen Masse (restringiertes Dreikörperproblem), aber auch auf die Annahme punktförmiger Massen und die Unterschlagung weiterer bahnstörender Elemente (Sonnendruck, mögliche Restatmosphäre etc.). Als Orientierung diene die im Anhang aufgeführte Literatur.

2 Newtonsche Himmelsmechanik

Aus der Mechanik ist bekannt, dass ein Körper bei Abwesenheit von Kräften in einem geradlinig gleichförmigen Bewegungszustand verharrt. Sei nun $x(t) = [x_x(t), x_y(t), x_z(t)] \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor eines Körpers im dreidimensionalen euklidischen Raum, so gilt für seine Geschwindigkeit

$$v(t) = x'(t) = \text{const.} \Leftrightarrow v' = x'' = 0$$

Dabei ist x'' die Beschleunigung des Körpers. Nach Newton sind Kräfte proportional zur Beschleunigung und zur Masse m eines Körpers. Da wir ein abgeschlossenes mechanisches System betrachten, ist der Zustand dieses System mit $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ für alle Zeiten festgelegt. Damit ergibt sich

$$mx'' = F(t, x, x')$$

Da ein Kraftgesetz nicht von der Wahl des Zeitursprungs abhängen kann, erhalten wir Differenzialgleichungen der Form

$$mx'' = F(x, x')$$

Wenn nun die Funktion F näher untersuchen wollen, müssen wir beachten, dass das Gravitationsfeld ein konservatives Kraftfeld ist. Konkret heißt das, es ist ein Zentralkraftfeld, in dem die geleistete Arbeit lediglich vom Anfangs- und Endpunkt einer Translation abhängt und nicht von Weg. Bewegt sich nun in einem konservativen Kraftfeld eine Masse um eine infinitesimale Strecke Δx , so erhält man für die Änderung der potentiellen Energie $E_p(x)$:

$$\Delta E_p(x) = \frac{\partial E_p(x)}{\partial x_x} \Delta x_x + \frac{\partial E_p(x)}{\partial x_y} \Delta x_y + \frac{\partial E_p(x)}{\partial x_z} \Delta x_z$$

Da wir im konservativen Kraftfeld von der Energieerhaltung ausgehen, wird bei dieser Änderung der potentiellen Energie die Arbeit

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = -\Delta E_p$$

verrichtet. Durch Umstellen erhalten wir

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x_x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial x_y} \quad \text{und} \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial x_z}.$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$F = - \left[\frac{\partial E_p}{\partial x_x}, \frac{\partial E_p}{\partial x_y}, \frac{\partial E_p}{\partial x_z} \right] = -\text{grad}E_p = -\nabla E_p$$

Die potentielle Energie einer Masse m ist nur vom Ort x abhängig. Ist nun r der Abstand zum Zentrum des Gravitationsfeldes, so können wir diese potentielle Energie durch die Arbeit W_{pot} beschreiben, die nötig ist, um m von einem unendlich fernen und somit kräftefreien Punkt in den Abstand r zu bringen. Dabei nennen wir W_{pot} in Zukunft das Gravitationspotential $U(r)$ und definieren:

$$U(r) := \int_{\infty}^r F \cdot dr$$

So erhalten wir für die Kraft im Gravitationsfeld allgemeiner

$$F = -\nabla U(r)$$

2.1 Bewegung mehrerer Körper im Gravitationsfeld

2.1.1 Das Zweikörperproblem

Für zwei Körper nehmen wir die Koordinaten x_1 und x_2 , die Massen m_1 und m_2 , sowie den Abstand $r_{12} = |x_1 - x_2|$ an. Grundlage unserer Untersuchungen ist das newtonsche Gravitationsgesetz, das die Kraft zwischen zwei Massen beschreibt:

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{r_{12}^3} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

oder in skalarer Schreibweise

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Dabei ist γ die Gravitationskonstante und $\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$ der Einheitsvektor in die Richtung von r . Es ist ersichtlich, dass F umgekehrt proportional zu r^2 und von \mathbf{r} linear abhängig ist. Im Folgenden wollen wir die skalare Form des Gravitationsgesetzes verwenden um das Gravitationspotential zu bestimmen:

$$\begin{aligned} U(r_{12}) &= \int_c^{r_{12}} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Big|_c^{r_{12}} \\ &= -\gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

und für $c \rightarrow \infty$ also schließlich

$$U(r_{12}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Wir erhalten also Bewegungsgleichungen der Form

$$m_1 x_1'' = -\nabla_{x_1} U(r_{12}), \quad m_2 x_2'' = -\nabla_{x_2} U(r_{12})$$

2.2 Das Mehrkörperproblem

Gehen wir nun zum allgemeineren Mehrkörperproblem über und betrachten n Massepunkte mit den Massen m_i und den Ortsvektoren x_i ($i = 1, \dots, n$). So ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$m_i x_i'' = -\nabla_{x_i} U, \quad i = 1, \dots, n$$

und das Gravitationspotential aus der Summe der Einzelkräfte

$$\begin{aligned} U &= \int_{\infty}^r \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n F_{ij} dr \\ &= -\gamma \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

Leider existieren für das Mehrkörperproblem mit $n \geq 3$ nur für wenige Spezialfälle geschlossene Lösungen, so dass man solche Differentialgleichungssysteme numerisch integrieren muss.

3 Das Modell Erde-Mond-Satellit

In der Praxis ist es meist zu aufwendig alle Körper eines Sonnensystems (etc.) zu betrachten. Andererseits reicht es oft nicht aus nur zwei Körper zu berücksichtigen. Beispiele sind die Systeme Doppelstern mit Begleiter, Erde-Mond-Satellit oder ein Flug zum Mond. Wir möchten nun im Folgenden numerisch die Bahn eines Satelliten bestimmen und untersuchen dazu das Dreikörperproblem mit den Körpern Erde, Mond und künstlicher Satellit.

3.1 Das Dreikörperproblem

Analog zu 2.2 erhalten wir zunächst das Gravitationspotential

$$U := U(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = -\gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right)$$

und die Bewegungsgleichungen

$$m_1 x_1'' = -\nabla_{x_1} U, \quad m_2 x_2'' = -\nabla_{x_2} U, \quad m_3 x_3'' = -\nabla_{x_3} U \quad (1)$$

Wir können für die Lösung unseres speziellen Modells allerdings noch einige Besonderheiten berücksichtigen, die uns zum eingeschränkten Dreikörperproblem führen.

3.1.1 Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Zur Beschreibung der Bewegung der drei Körper in unserem Modell machen wir einige Vereinfachungen, die zugleich das eingeschränkte Dreikörperproblem charakterisieren:

- die Massen m_1 und m_2 bewegen sich auf einer kreisförmigen Bahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt
- die Masse m_3 ist vernachlässigbar gegen m_1 und m_2 , so dass sie deren Bewegung nicht beeinflusst
- alle Bewegungen finden in einer Ebene statt

Zur Beschreibung der Bewegung wählen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem (ξ, η) . Im Ursprung liegt der Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 . Das Koordinatensystem dreht sich dabei mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so dass die Massen m_1 und m_2 stets auf der ξ -Achse liegen. Das neue Koordinatensystem (ξ, η) geht durch folgende Transformation aus einem „statischen“ Koordinatensystem (x, y) hervor:

$$u_i = D(\omega t) e_i = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} e_i, \quad 1 \leq i \leq 2$$

Dabei ist $\{e_1, e_2\}$ eine Orthonormalbasis im (x, y) -Koordinatensystem und $\{u_1, u_2\}$ eine Orthonormalbasis im (ξ, η) -Koordinatensystem. Weiterhin wählen wir als Einheitslänge den Abstand r_{12} , so dass nach dem Schwerpunkt-/Hebelgesetz m_1 die Koordinaten $(-\mu, 0)$ und m_2 die Koordinaten $(1 - \mu, 0)$ hat. Es ist also

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Da wir uns durch das rotierende Koordinatensystem eine Vereinfachung des Problems geschaffen haben, müssen wir jetzt nur noch die Bewegungsgleichung des Körpers m_3 bestimmen.

Sei nun $s(t)$ eine Bahn der Masse m_3 im „statischen“ (x, y) -Koordinatensystem und $\rho(t)$ eine Bahn im rotierenden (ξ, η) -Koordinatensystem, so gilt:

$$s(t) = D(\omega t) \cdot \rho(t)$$

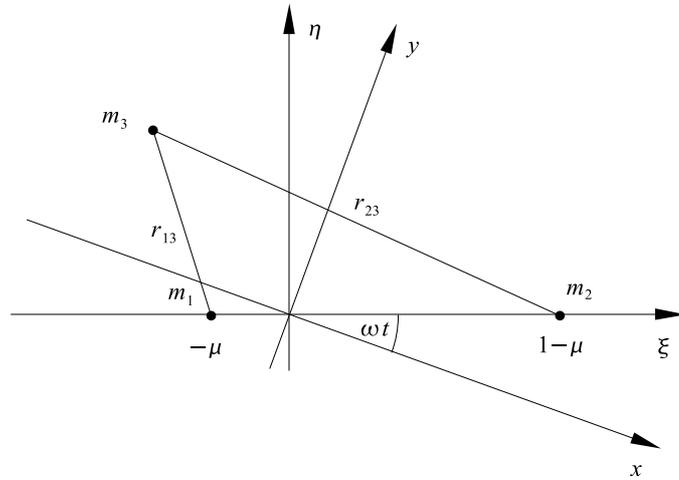


Abbildung 1: rotierendes Koordinatensystem

Definieren wir $D := D(\omega t)$, $s := s(t)$ und $\rho := \rho(t)$ und differenzieren die Gleichung zwei mal nach t , erhalten wir nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} s'' &= D'' \cdot \rho + 2D' \cdot \rho' + D \cdot \rho'' \\ \Leftrightarrow \rho'' &= D^{-1} \cdot s'' - D^{-1} \cdot D'' \cdot \rho - 2D^{-1} \cdot D' \cdot \rho' \end{aligned}$$

Dabei ist

$$D' = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}' = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

und

$$D'' = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix}' = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t \end{pmatrix}$$

Weiterhin erhalten wir die Vereinfachungen

$$D^{-1} \cdot D' = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$D^{-1} \cdot D'' = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also vereinfacht sich die obige Differentialgleichung zu

$$\rho'' = D^{-1} \cdot s'' - \omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \rho - 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \rho'$$

bzw.

$$\rho'' + \omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \rho + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \rho' = D^{-1} \cdot s''$$

Jetzt ist es an der Zeit, dass wir uns an die Gleichungen (1) erinnern. Demnach gilt für $\rho \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} m_3 s'' &= -\nabla_{\rho} U \\ \Leftrightarrow m_3 s'' &= \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \rho_x} \left(\frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right), \frac{\partial}{\partial \rho_y} \left(\frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \right] \\ \Leftrightarrow s'' &= \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \rho_x} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right), \frac{\partial}{\partial \rho_y} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \right] \end{aligned}$$

Wählen wir weiterhin die Einheiten der Gravitationskonstante und der Winkelgeschwindigkeit so, dass $\gamma = 1$ und $\omega = 1$, und beachten, dass $m_1 + m_2 = 1$ und $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, sowie $r_{ij} = |\rho_i - \rho_j| = |s_i - s_j|$, so ergibt sich unsere Differentialgleichung zu

$$\rho'' - \rho + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \rho' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} \right) \end{bmatrix}$$

Stellen wir nun für die ξ - und die η -Komponente jeweils einzelne Differentialgleichungen der Bahn $\rho(t) = (\xi(t), \eta(t))$ auf, so erhalten wir für das eingeschränkte Dreikörperproblem schließlich

$\xi'' - 2\eta' - \xi = \frac{\partial U(r_{13}, r_{23})}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \eta'' + 2\xi' - \eta = \frac{\partial U(r_{13}, r_{23})}{\partial \eta}$ <p style="text-align: center;">mit dem Potential $U(r_{13}, r_{23}) = \frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}}$</p>
--

Eine analoge Schreibweise, die man auch oft findet ist:

$\xi'' = 2\eta' + \frac{\partial V(r_{13}, r_{23})}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \eta'' = -2\xi' + \frac{\partial V(r_{13}, r_{23})}{\partial \eta}$ <p style="text-align: center;">mit $V(r_{13}, r_{23}) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}}$</p>

Für dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen existiert keine geschlossene algebraische Lösung, so dass wir sie im Folgenden numerisch lösen müssen.

4 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Da wir nun ein vereinfachtes Modell der Satellitenbahn geschaffen haben, sollten wir überprüfen, ob dieses Modell die Wirklichkeit auch beschreiben kann. So gehört in der realen Welt offensichtlich zu jedem Vektor aus Ort und Geschwindigkeit genau eine Bahn. Wir untersuchen also ob es Lösungen zu jedem Punkt des vierdimensionalen Vektorraumes gibt und ob sie eindeutig sind. Dazu bedienen wir uns des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \supset [0, a] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig auf dem Intervall

$$Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq \delta, |x - x_0| \leq \delta \cdot M\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

und genüge der Lipschitz-Bedingung:

$$\exists L > 0 : \|f(t, x_a) - f(t, x_b)\| \leq L \cdot \|x_a - x_b\| \quad \forall (t, x_a), (t, x_b) \in Q$$

Es gelte $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in Q\}$.

Dann existiert eine Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ im Intervall $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und ist dort eindeutig bestimmt.

Da sich dieser Satz auf ein Anfangswertproblem erster Ordnung bezieht, müssen wir das zu untersuchende Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung zunächst in die Form $x' = f(x)$ bringen. Dazu definieren wir ein $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\xi, \eta, \xi', \eta')$ mit

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_3, & x'_3 &= 2x_4 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ x'_2 &= x_4, & x'_4 &= -2x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{aligned}$$

so dass wir

$$f(x) = x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 2x_4 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ -2x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

erhalten. Beachten wir, dass $r_{13}^2 = (x_1 + \mu)^2 + x_2^2$ und $r_{23}^2 = (x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2$,

können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned}
 f(x) = x' &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 2x_4 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu-x_1)^2 + x_2^2}} \right) \\ -2x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu-x_1)^2 + x_2^2}} \right) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow x' &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 + 2x_4 - \frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{r_{13}^3} - \frac{\mu(x_1+\mu-1)}{r_{23}^3} \\ x_2 - 2x_3 - \frac{x_2(1-\mu)}{r_{13}^3} - \frac{\mu x_2}{r_{23}^3} \end{pmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Als erstes tragen wir noch einmal kurz zusammen, was wir über die obige Gleichung wissen:

- $\mu \in [0, 1]$ ist eine Konstante
- $r_{12}^2 = (x_1 + \mu)^2 + x_2^2$
- $r_{22}^2 = (x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2$

Es ist klar, dass es für obige Differentialgleichung keine Lösung geben kann, wenn $r_{13} = 0$ oder $r_{23} = 0$.

Wir wählen die Supremumsnorm und machen die Annahme, dass für $x_0 : r = \varepsilon$ und für alle betrachteten $r : r_{13} > \frac{\varepsilon}{2}$ und $r_{23} > \frac{\varepsilon}{2}$ mit $\varepsilon > 0$. Damit legen wir das zu überprüfende Existenzintervall so, dass $r_{13} = 0$ oder $r_{23} = 0$ immer ausgeschlossen ist.

Jetzt muss gezeigt werden, dass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist:

$$\exists L > 0 : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Als Hilfsmittel benutzen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

und formulieren unser Problem entsprechend um:

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\|_{\infty} = \|f'(t, x_0)\|_{\infty} \quad \Rightarrow \quad \sup \|Df(t, x)\|_{\infty} \leq L$$

Dabei ist D die Jacobi- oder Ableitungsmatrix.

Durch partielles Ableiten von $f(x)$ nach $x_1 \dots x_4$ erhalten wir die Zeilen von D zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - (1 - \mu) \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{3(x_1 + \mu)}{r_{13}^4} \cdot \frac{x_1 + \mu}{r_{13}} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{3(x_1 + \mu - 1)}{r_{23}^4} \cdot \frac{x_1 + \mu - 1}{r_{23}} \right) \\ \frac{3x_2(1 - \mu)}{r_{13}^4} \cdot \frac{x_1 + \mu}{r_{13}} + \frac{3\mu x_2}{r_{23}^4} \cdot \frac{x_1 + \mu - 1}{r_{23}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3(1 - \mu)(x_1 + \mu)}{r_{13}^4} \cdot \frac{x_2}{r_{13}} + \frac{3\mu(x_1 + \mu - 1)}{r_{23}^4} \cdot \frac{x_2}{r_{23}} \\ 1 - (1 - \mu) \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{3x_2}{r_{13}^4} \cdot \frac{x_2}{r_{13}} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{3x_2}{r_{23}^4} \cdot \frac{x_2}{r_{23}} \right) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist es daran, die einzelnen Spalten der Jacobi-Matrix mit Hilfe unserer Annahmen abzuschätzen:

1)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - (1 - \mu) \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{3(x_1 + \mu)^2}{r_{13}^5} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{3(x_1 + \mu - 1)^2}{r_{23}^5} \right) \\ \frac{3(1 - \mu)x_2(x_1 + \mu)}{r_{13}^5} + \frac{3\mu x_2(x_1 + \mu - 1)}{r_{23}^5} \end{pmatrix}$$

a) Abschätzen der dritten Komponente mittels der Dreiecksungleichung und der Ungleichungen $(x_1 + \mu)^2 \leq r_{13}^2$ sowie $(x_1 + \mu - 1)^2 \leq r_{23}^2$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} \right| &\leq 1 + \left| \frac{\mu - 1 + 3}{r_{13}^3} \right| + \left| \frac{3\mu - \mu}{r_{23}^3} \right| = 1 + \left| \frac{2 + \mu}{r_{13}^3} \right| + \left| \frac{2\mu}{r_{23}^3} \right| \\ &\leq 1 + \frac{8}{\varepsilon^3} (2 + 3\mu) \\ &\leq 1 + \frac{40}{\varepsilon^3} \end{aligned}$$

b) Abschätzen der vierten Komponente unter zusätzlicher Verwendung der Youngschen Ungleichung $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} \right| &\leq 3(1-\mu) \frac{x_2^2 + (x_1 + \mu)^2}{2r_{13}^5} + 3\mu \frac{x_2^2 + (x_1 + \mu - 1)^2}{2r_{23}^5} \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) \\
&\leq \frac{12}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

2)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3(1-\mu)x_2(x_1+\mu)}{r_{13}^5} + \frac{3\mu x_2(x_1+\mu-1)}{r_{23}^5} \\ 1 - (1-\mu) \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{3x_2^2}{r_{13}^5} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{3x_2^2}{r_{23}^5} \right) \end{pmatrix}$$

a) Abschätzen der dritten Komponente:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} \right| &= \left| \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} \right| \\
&\leq \frac{12}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

b) Abschätzen der vierten Komponente:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} \right| &\leq 1 + \left| -(1-\mu) \frac{(-2)}{r_{13}^3} \right| + \left| -\mu \frac{(-2)}{r_{23}^3} \right| \\
&= 1 + \left| \frac{2-2\mu}{r_{13}^3} \right| + \left| \frac{2\mu}{r_{23}^3} \right| \\
&\leq 1 + \frac{32}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich bei unserer teils recht großzügigen Abschätzung

$$\exists L : \sup \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 + \frac{40}{\varepsilon^3} & \frac{12}{\varepsilon^3} & 0 & 2 \\ \frac{12}{\varepsilon^3} & 1 + \frac{32}{\varepsilon^3} & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq L$$

Wobei L für alle $\varepsilon \neq 0$ existiert, aber gerade für eine Umgebung mit $\varepsilon \rightarrow 0$ stark von diesem Abhängt. Es existieren also auch eindeutige Lösungen für alle $r_3 > 0$.

Als nächstes sollten wir noch das zeitliche Existenzintervall untersuchen. Wir haben in unserer Annahme festgelegt, dass $|x - x_0|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} = \delta \cdot M$. Somit gilt $|t - t_0|_\infty \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Dabei ist $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in Q\}$. Dieses M müssen wir nun im Folgenden bestimmen oder zumindest nach oben abschätzen um ein zeitliches Existenzintervall zu erhalten, in dem es eindeutige Lösungen gibt. Es sind $r_{i3} > \frac{\varepsilon}{2}$ und $r_{i3} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon$ und da wir die Supremumsnorm verwenden auch $|x_i| \leq \frac{3}{2}\varepsilon$ ($i \in \{1, 2\}$), was uns zu folgender Abschätzung führt:

$$\begin{aligned}
|f_1(t, x)| &= |x_3| \\
|f_2(t, x)| &= |x_4| \\
|f_3(t, x)| &\leq |x_1| + |2x_4| + \left| \frac{(\mu - 1)(x_1 + \mu)}{r_{13}^3} \right| + \left| \frac{-\mu(x_1 + \mu - 1)}{r_{23}^3} \right| \\
&\leq |x_1| + |2x_4| + \frac{(\mu - 1)^2 + (x_1 + \mu)^2}{2r_{13}^3} + \frac{\mu^2 + (x_1 + \mu - 1)^2}{2r_{23}^3} \\
&\leq |2x_4| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8(1 + \frac{9}{4}\varepsilon^2)}{2\varepsilon^3} + \frac{8(1 + \frac{9}{4}\varepsilon^2)}{2\varepsilon^3} \\
&= |2x_4| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8 + 18\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \\
|f_4(t, x)| &\leq |-2x_3| + |x_2| + \left| \frac{(\mu - 1)x_2}{r_{13}^3} \right| + \left| \frac{-\mu x_2}{r_{23}^3} \right| \\
&\leq |-2x_3| + |x_2| + \left| \frac{(\mu - 1)^2 + x_2^2}{2r_{13}^3} \right| + \left| \frac{\mu^2 + x_2^2}{2r_{23}^3} \right| \\
&\leq |-2x_3| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8(1 + \frac{9}{4}\varepsilon^2)}{2\varepsilon^3} + \frac{8(1 + \frac{9}{4}\varepsilon^2)}{2\varepsilon^3} \\
&= |2x_3| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8 + 18\varepsilon^2}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

Und schließlich erhalten wir ein Zeitintervall, für das die eindeutigen Lösungen existieren:

$$\begin{aligned}
|t - t_0| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \\
\Leftrightarrow |t - t_0| &\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \max\{|2x_3| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8+18\varepsilon^2}{\varepsilon^3}, |2x_4| + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{8+18\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\}} \\
\Leftrightarrow |t - t_0| &\leq \frac{\varepsilon}{3\varepsilon + 4\left(\frac{2+9\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\right) + 4 \max\{|x_3|, |x_4|\}}
\end{aligned}$$

Somit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ auch ein zeitliches Existenzintervall.

5 Simulation

Zur Simulation des untersuchten Modells habe ich *Octave* und zum plotten der grafischen Darstellungen *Gnu-Plot* benutzt. *Octave* lehnt sich in der Syntax stark an *Matlab* an, so dass die Simulation auch unter Matlab leicht durchzuführen wäre. Die Octave-Dateien dazu befinden unter <http://bfe.hachti.de/prosem/>. Grundlage der Simulation ist das Differentialgleichungssystem (2), welches mit der Octave-Funktion „lsode“ gelöst wurde. Dabei wurden von einer Erdmasse von $m_E = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg und einer Mondmasse von $m_M = 7,350 \cdot 10^{22}$ kg ausgegangen¹.

Im Folgenden nun zunächst das Listing des „Hauptprogramms“:

```
% This is a simulation of the Restricted 3-Body Problem
% You can find the ode in xdot.m
%
% e.g. x0=[0.097776; 0; 0; 2.90142], m1=5974, m2=73.50
%
%-----

% parameters

m1 = 5974; % mass of earth
m2 = 73.50; % mass of moon
x0 = [0.097776; 0; 0; 2.90142]; % [locus1; locus2; speed1; speed2]
t = [0:0.002:84]; % 1d=0,2302992

lsode_options ("absolute tolerance", 1.4901e-08); % default 1.4901e-08
lsode_options ("relative tolerance", 1.4901e-08); % default 1.4901e-08
% lsode_options ("integration method", "stiff"); % default stiff
% lsode_options ("initial step size", -1); % default not spec.
% lsode_options ("maximum step size", -1); % not specified
% lsode_options ("minimum step size", 0); % default 0
% lsode_options ("step limit",100000); % default 100000

%-----

global mu1;
global mu2;

mu1 = m2 / (m1 + m2)
mu2 = 1 - mu1;
```

¹Winnenburg, Wolfram: *Einführung in die Astronomie*. BI-Wiss.-Verl.: Mannheim, 1990

```

y = lsode("ode", x0, t); % ode solver

plot(y(:,1),y(:,2),"g"); % plots the path
title("t=365d, RelTol=1.4901e-08, AbsTol=1.4901e-08")
axis("equal");
xlabel('x_1(t)');
ylabel('x_2(t)');
grid; % grid lines

hold on;
plot(-mu1,0,"rx"); % draw the 'planets'
plot(mu2,0,"r*");
hold off;

input("Press RETURN to continue.");

plot(t,(((y(:,1)+mu1).^2+(y(:,2)).^2).^0.5)); % plots r_(13)
axis("normal");
xlabel("t");
ylabel("r_(13)");

```

Die Formulierung der Differentialgleichungen befindet sich in ode.m:

```

% Restricted 3-Body Problem
% x'=f(x,t)
% x=(x,y,x',y')
function xdot = ode(x,t)

global mu1; % mu1/2 from main program
global mu2; % mu2 = 1-mu1

xdot = zeros (4,1); % initialize xdot

r1 = ((x(1) + mu1).^2 + x(2).^2).^3/2; % r13 ^3
r2 = ((x(1) - mu2).^2 + x(2).^2).^3/2; % r23 ^3

xdot(1) = x(3);
xdot(2) = x(4);
xdot(3) = x(1) + 2.*x(4) - mu2.*(x(1) + mu1)./r1 - mu1.*(x(1) - mu2)./r2;
xdot(4) = x(2) - 2.*x(3) - mu2.*x(2)./r1 - mu1.*x(2)./ r2;

endfunction

```

5.1 Physikalische Einheiten

Wollen wir konkrete Anfangsbedingungen angeben und untersuchen wann sich ein Satellit an welchem Ort befindet, müssen wir uns zunächst fragen, welche Einheiten für die verwendeten Größen benutzt werden müssen.

5.1.1 Längeneinheit

Die Längeneinheit wird durch die Entfernung Erde-Mond bestimmt, da wir so die Einheitslänge definiert haben. Nehmen wir also die mittlere Entfernung Erde-Mond mit 384 400 km an, so gilt²:

$$\begin{aligned} 1 \text{ (Längeneinheit)} &= 384\,400 \text{ km} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m} \\ &\text{bzw.} \\ 1 \text{ m} &= 2,601 \cdot 10^{-9} \text{ (Längeneinheiten)} \end{aligned}$$

5.1.2 Masseneinheit

Für die Einheitsmasse haben wir oben $1 = m_1 + m_2$ festgelegt. Sind also $m_1 = m_E = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und $m_2 = m_M = 7,350 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, so ist die Masseneinheit festgelegt als:

$$\begin{aligned} 1 \text{ (Masseneinheit)} &= 6,0475 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ &\text{bzw.} \\ 1 \text{ kg} &= 1,6536 \cdot 10^{-25} \text{ (Masseneinheiten)} \end{aligned}$$

5.1.3 Zeiteinheit

Mittels der Gravitationskonstante, deren Einheit wir mit Eins festgesetzt haben, ist es nun möglich die Einheitenumrechnung für die Zeit durchzuführen.

$$\begin{aligned} \gamma = 1 &= 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}} \\ \Leftrightarrow 1 \text{ s}^2 &= 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{(2,601 \cdot 10^{-9})^3}{1,6536 \cdot 10^{-25}} = 7,1049 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

Also gilt für die Zeiteinheiten:

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &= 2,6655 \cdot 10^{-6} \\ 1 \text{ h} &= 9,5958 \cdot 10^{-3} \\ 1 \text{ d} &= 0,2302992 \end{aligned}$$

²Winnenburg, Wolfram: *Einführung in die Astronomie*. BI-Wiss.-Verl.: Mannheim, 1990; Seite 178

5.2 Bahnuntersuchungen

5.2.1 Geostationäre Satelliten

Als Beispiel für eine praktisch orientierte Bahnuntersuchung soll die Anwendung des Modells auf einen geostationären Satelliten dienen. Nach der *Wikipedia* umkreisen diese Satelliten die Erde in einer Höhe $h = 35.880$ km. Somit ergibt sich für den Anfangswert

$$\eta = x_2 = 0$$

und

$$\begin{aligned}\xi = x_1 &= h + r_{Erde} - \mu = 3,588 \cdot 10^7 \text{km} + 6,378 \cdot 10^6 \text{km} - \mu \\ \Leftrightarrow x_1 &= 0,10993 - 0,012154 = 0,097776\end{aligned}$$

Die erste Ableitung im Anfangswert ergibt sich aus der Geschwindigkeit des Satelliten v_s zu t_0 , für die wir als Näherung eine Kreisbahn annehmen:

$$v_s = \frac{s_s}{t_s} = \frac{2\pi \cdot 0,10993}{0,23030} = 2,99918$$

Da unser Koordinatensystem allerdings rotiert, müssen wir die Geschwindigkeit v_s nach v'_s transformieren [2]:

$$\begin{aligned}v_s &= v'_s + (\omega \times r) \\ \Leftrightarrow v'_s &= v_s - (\omega \times r)\end{aligned}$$

Benutzen wir gleich die Einheiten, die wir uns für das rotierende Koordinatensystem geschaffen haben, beachten dass $\omega \perp r$ gilt und lassen den Satelliten in Rotationsrichtung des (ξ, η) -Koordinatensystems fliegen, so können wir die Transformation schreiben als:

$$\begin{aligned}v'_s &= v_s - (\omega \times r) \\ \Leftrightarrow v'_s &= v_s - |\omega| \cdot |r| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow v'_s &= 2,99918 - |1| \cdot |0,097776| \cdot 1 \\ \Leftrightarrow v'_s &= 2,90142\end{aligned}$$

Somit ergibt sich der Anfangswert zu $x_0 = (0,097776; 0; 0; 2,90142)$ und $t_0 = 0$.

Diese Bahn können wir nun mit verschiedenen Genauigkeiten simulieren. Dazu bietet *Octave* die beiden Parameter „relative tolerance“ (default: $1,4901 \cdot 10^{-8}$) und „absolute tolerance“ (default: $1,4901 \cdot 10^{-8}$). Bei *Matlab* heißen sie analog „RelTol“ (default: $1 \cdot 10^{-3}$) und „AbsTol“ (default: $1 \cdot 10^{-6}$). Über diese beiden Parametern wird die Schrittweite für jeden Integrationsschritt bestimmt, so dass

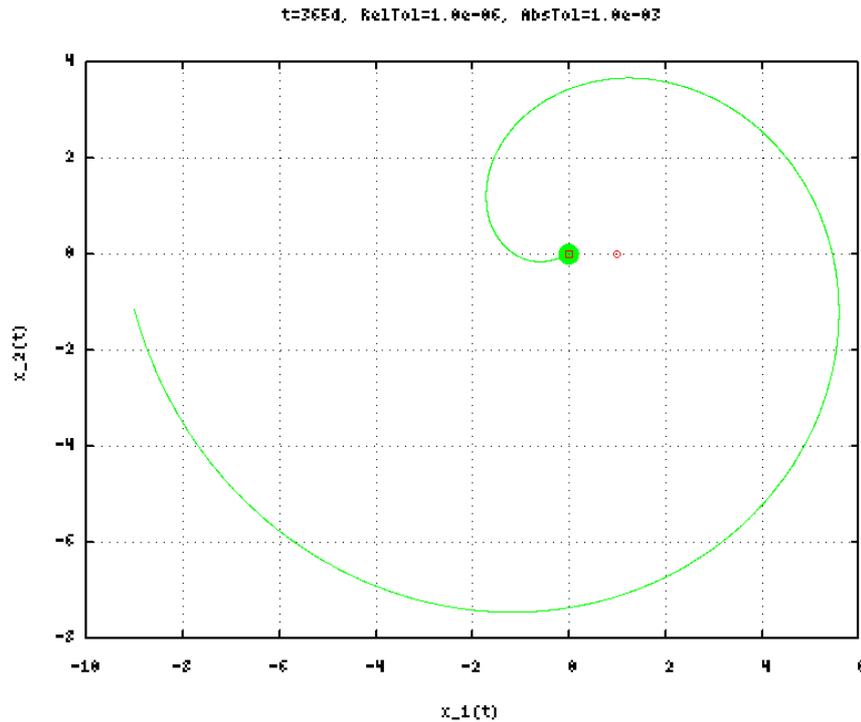


Abbildung 2: Bahn des geostationären Satelliten mit geringer Genauigkeit

für den lokalen Fehler $l(y_i)$ bei einem ermittelten Wert y_i und einem exakten Wert x_i gilt

$$|l(y_i)| = |y_i - x_i| \leq RelTol \cdot |y_i| + AbsTol$$

Ist diese Relation nicht mehr erfüllt, wird die Schrittweite der Integration angepasst und somit bei mehr Rechenzeit eine höhere Genauigkeit erreicht. Dabei ist $RelTol$ immer ein Skalar, $AbsTol$ kann hingegen auch ein n-Tupel sein und kommt hauptsächlich bei kleinen $|y_i|$ zum Tragen.

Zunächst soll das Modell mit den Default-Einstellungen von Matlab über einen Zeitraum von 365 Tagen simuliert werden.

Bei dieser Simulation (Abb. 2 und 3) fällt auf, dass sich der Satellit für ca. 335 Tage zwar nicht in seinem Orbit, aber zumindest in der Nähe der Erde aufhält. Dann nimmt der Abstand zur Erde aber plötzlich fast linear zu. Betrachten wir den Punkt an dem dies passiert in Abb. 4 näher, erkennen wir, dass dort der Satellit der Erde sehr nah gekommen ist. Er ist praktisch abgestürzt.

Erhöhen wir jedoch die Toleranzen auf die Grundeinstellungen von *Octave* mit einer absoluten und einer relativen Toleranz von jeweils $1.4901 \cdot 10^{-8}$ (Abb. 5 und 6), so zeigt sich ein anderes Bild. Der Satellit umkreist auf einer leicht elliptischen

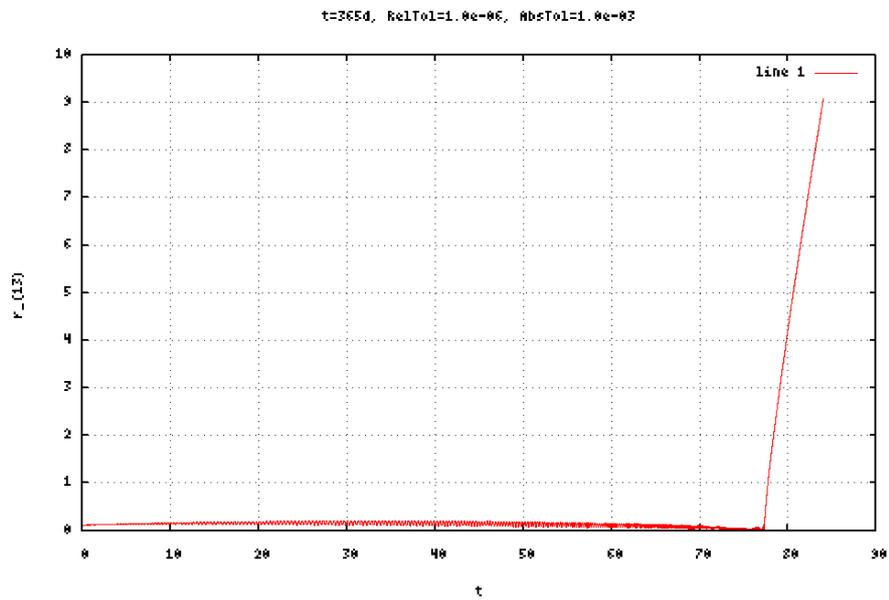


Abbildung 3: Abstand des geostationären Satelliten von der Erde

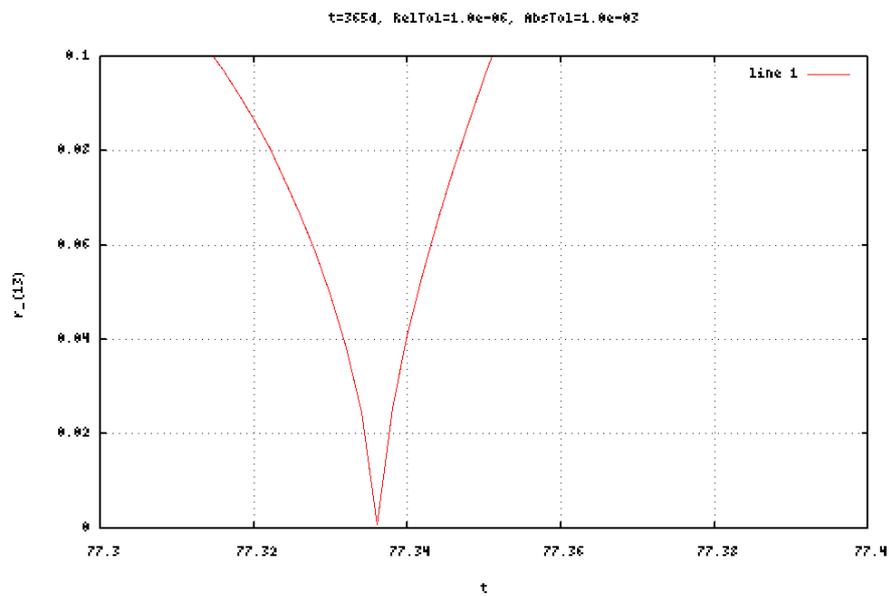


Abbildung 4: Der „Ausbrechpunkt“

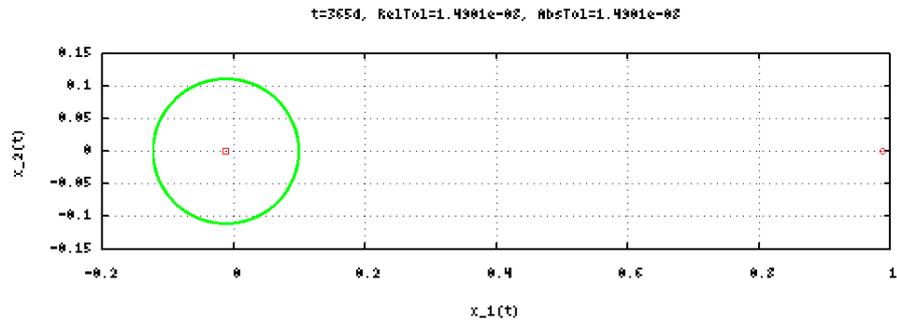


Abbildung 5: *Bahn des geostationären Satelliten mit hoher Genauigkeit*

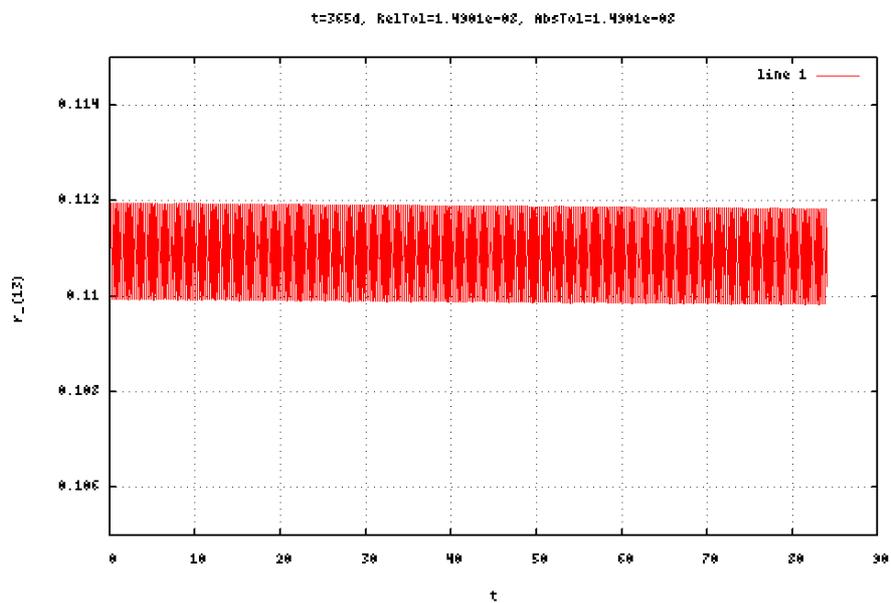


Abbildung 6: *Abstand des geostationären Satelliten von der Erde*

Bahn die Erde, nähert sich dieser aber langsam an. Der Grund hierfür liegt in der Ungenauigkeit der Anfangswerte (u.a. Annahme einer Kreisbahn, Rundung der Werte) und in der Fehlerfortpflanzung.

Dieser Vergleich zweier Simulationen mit unterschiedlicher Genauigkeit macht aber deutlich, dass man sich bei einer numerischen Simulation über einen längeren Zeitraum durchaus auch über Fehlerfortpflanzung und die Genauigkeit der Anfangswerte und der Integrationssschritte Gedanken machen muss.

6 Grenzen des Modells

Das vorgestellte Modell des eingeschränkten Dreikörperproblems ist natürlich nur eine vereinfachte Beschreibung einer Satellitenbahn, erlaubt es jedoch eine erste Vorstellung vom Verhalten eines Dreikörpersystems zu erlangen.

Neben den Einschränkungen, die das Modell mit sich bringt, bleiben mögliche Faktoren für Bahnstörungen unberücksichtigt. Das sind u.a.:

- Die Abweichung der Erde von einer kugelförmigen Gestalt und somit auch die Abweichung von einer symmetrischen Masse- bzw. Dichteverteilung (z.B. Abplattung)
- Einflüsse anderer Himmelskörper
- Sonnendruck
- Restatmosphäre in Erdnähe

Es gibt also noch reichlich Material um sich mit den Bahnen von Satelliten zu beschäftigen.

Literatur

- [1] Deuffhard, Peter / Bornemann, Folkmar: *Numerische Mathematik II*. Walter de Gruyter: Berlin - New York, 1994
- [2] Demtröder, Wolfgang: *Experimentalphysik 1*. Springer-Verlag: Berlin, 2004
- [3] Gerthsen, Christian / Kneser, Hans O. / Vogel, Helmut: *Physik*. Springer-Verlag: Berlin, 1992
- [4] Guthmann, Andreas: *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*. BI-Wiss.-Verl.: Mannheim, 1994
- [5] Montenbruck, Oliver: *Grundlagen der Ephemeridenrechnung, Sterne und Weltraum*. Heidelberg, 2001
- [6] Polard, Harry: *Mathematical Introduction To Celestial Mechanics*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 1966